28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\dfrac{4}{15}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\dfrac{4}{15}$

29 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 3^x dx$.
2. $\int_0^{-1} \dfrac{3^x}{1+3^x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{1}{\ln(2)}} 2^x\left(1+2^x\right)^2 dx$.
4. $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}} dx$.
5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 4x^{-\frac{1}{5}} dx$.
6. $\int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx$.
7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (3x-1)^{\frac{3}{2}} dx$.

30 Le but de l'exercice est de calculer

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos^2(x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2(x)dx$.

1. Montrer que $I+J=\dfrac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2}$.
2. Soit $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cos(2x)dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $K=-\dfrac{\ln 2}{2}\left[\dfrac{\sqrt{2^\pi}+1}{2}+\dfrac{\ln 2}{2}K\right]$.

En déduire la valeur de $I-J$.

3. Donner les valeurs de I et J.

31 1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{-\alpha}$, où α est un rationnel strictement supérieur à 1.

Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

2. Soit (S_n) la suite définie par $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}$, $n\geq 1$.

Soit k un entier supérieur où égal à 1.

Montrer que pour tout x de $[k,k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha}\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq\frac{1}{k^\alpha}.$$

3. a. Montrer que pour tout entier n,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx\leq S_n\leq S_1+\int_1^n f(x)dx.$$

b. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.

c. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

d. Déterminer un réel α tel que la suite (S_n) converge vers un réel compris entre 2007 et 2008.

32 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+x-e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

c. Etudier la position de C_f par rapport à D.

2. a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.